Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 1 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Scuole d'abaco, fonti di problemi per la costruzione del pensiero algebrico Prima Parte - Appunti di storia dell'algebra

Sommario

In questo articolo riportiamo alcuni appunti di storia dell'algebra, una sintesi della presentazione fatta nella Prima parte dell'Incontro del 21 gennaio 2024 del corso di aggiornamento domenicale del Centro "Morin" *La lunga strada verso il pensiero algebrico: dai segni e dai sistemi di numerazione alle prime attività di simbolizzazione*. Ci soffermiamo in particolare sul *Liber Abbaci* come fonte di molti dei problemi che si ritrovano successivamente nei *trattati d'abaco* del Medioevo e del Rinascimento. L'opera ha contribuito a diffondere un nuovo modo di scrivere i numeri e di fare le operazioni con essi, in Italia e in Europa: una matematica che ha "trasformato il mondo".

Abstract

In this article we report some notes on the history of algebra, a summary of the presentation made in the first part of the Sunday meeting of the "Morin" Centre - 21 January 2024 - *The long road towards algebraic thinking: from signs and numbering systems to the first activities of symbolization*. We focus in particular on the *Liber Abbaci* as the source of many of the problems subsequently found in the abacus treatises of the Middle Ages and the Renaissance. The work contributed to spreading a new way of writing numbers and carrying out operations with them, in Italy and Europe: a mathematics that "transformed the world".

Luigi Tomasi, Adriano Demattè

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE
VOL.47 A N.2
MARZO 2024

Scuole d'abaco, fonti di problemi per la costruzione del pensiero algebrico
Prima Parte - Appunti di storia dell'algebra

Luigi Tomasi – Adriano Demattè
Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin"

Introduzione

Il presente articolo è ricavato da un intervento svolto dagli autori nel Corso di Aggionamento domenicale 2023-2024 del Centro Ricerche Didattiche "Morin" dedicato alla formazione del pensiero algebrico, con uno speciale riferimento agli spunti offerti dalla storia della matematica. L'intervento è stato suddiviso in due parti. Nella prima sono stati presentati alcuni momenti della storia dell'algebra, con particolare attenzione al *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. Nella seconda parte, l'attenzione è stata posta su alcuni problemi che possono essere interessanti per il lavoro in classe e sulle relative considerazioni di metodo.

L'algebra elementare si comincia a studiare fin dalla scuola secondaria di I grado. Ripensando alla nostra esperienza di insegnanti, non possiamo non ricordare le difficoltà di molti allievi. Ci ritornano alla memoria i casi di coloro che hanno iniziato a provare un "rifiuto" per la matematica proprio a causa dell'algebra. Ci siamo interrogati su come gli alunni possano essere aiutati a comprendere l'utilità del linguaggio algebrico, la sua logica interna, e quella che noi consideriamo la sua bellezza. La storia riteniamo possa fornire punti di vista adatti ad affrontare queste difficoltà. Riteniamo che sia cruciale l'impostazione delle attività ricavate dalla storia della matematica ed è a questo che abbiamo finalizzato l'intervento nella mattinata di lavoro del corso domenicale. Nella Scuola Primaria, vari aspetti della formazione matematica possono essere ricondotti ad aspetti del pensiero algebrico.

Che cos'è l'algebra? Una domanda alla quale è difficile rispondere…

In "prima approssimazione" possiamo dire che l'algebra è una

Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 3 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

generalizzazione di alcuni algoritmi e regole di aritmetica. Infatti, il significato di "Regola d'Algebra"che troviamo fra i matematici del Rinascimento è proprio quello di procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici, che consiste in tre momenti essenziali: la messa in equazione, la riduzione dell'equazione in una forma opportuna e poi l'effettiva risoluzione dell'equazione. Questi passaggi presuppongono quello che viene chiamato "calcolo algebrico" (detto, anche se in modo piuttosto fuorviante per vari motivi che appariranno anche nella seconada parte del presente articolo, "calcolo letterale"). Tale calcolo è favorito oggi - da circa quattro secoli a questa parte - da un simbolismo condiviso, molto efficace. Nella storia dell'algebra, appare opportuno distinguere la storia dei concetti da quella del simbolismo usato per esprimerli.
Dal punto di vista dei concetti, le origini dell'algebra si possono far risalire a tre fonti antiche diverse: alla matematica babilonese, alla matematica greca - in particolare all'opera di Diofanto di Alessandria (vissuto tra il III e il IV secolo d.C.) - e alla matematica indiana (circa V sec. d.C.).
Alla matematica babilonese risale la risoluzione di alcune equazioni di I e di II grado, come appare in alcune tavolette di terracotta riportanti iscrizioni in caratteri cuneiformi, databili intorno al 2000 a.C. (Neugebauer, 1969). Per quanto riguarda la matematica greca, si può parlare propriamente di "algebra" a partire dall'opera di Diofanto. La sua *Arithmetica* contiene, oltre a difficili ed eleganti problemi di analisi indeterminata, la risoluzione di equazioni e problemi di I e II grado, con elementi di calcolo algebrico. Più tarda è l'algebra indiana i cui inizi si fanno risalire alla seconda metà del V secolo d.C.: di tale periodo è l'opera in versi del matematico Aryabhata nella quale viene riportato come risolvere, tra l'altro, un'equazione di I grado, un'equazione di secondo grado e un sistema di primo grado in due incognite.

Il trattato sull'algebra di al-Khwārizmi

Al-Khwārizmi (ca. 780 - ca. 850) è stato un matematico ed astronomo persiano; nato probabilmente nel Khorezm (regione a est del mar Caspio) e vissuto a Bagdad. Egli ha studiato e diffuso il sistema di numerazione indiano, che noi chiamiamo oggi "indo-arabico", ed è autore di un importante trattato intitolato *Kitāb al-jabr wal mukābala* (scritto in un periodo che va dall'813 all'833, a Bagdad) nel quale risolve le equazioni fino al II grado, a parole ma anche in modo geometrico, e dove appare evidente il riferimento al Libro II degli *Elementi* di Euclide. Il titolo originale dell'opera di al-Khwārizmi potrebbe essere tradotto in italiano con "Libro sul calcolo tramite completamento e bilanciamento". Questo trattato è stato tradotto per la prima volta in latino da Roberto di Chester, in Spagna, a Toledo, nel 1145, con il titolo *Liber algebrae et almuchabala.*
Per la traduzione italiana, si può vedere (Catastini et al., 2016).
La fama di al-Khwārizmi è fondata soprattutto su questo trattato ritenuto di fondamentale importanza per lo sviluppo dell'algebra. Dal suo nome, deformato da un traduttore in *Algorithmi*, deriva il termine *algoritmo*. L'opera di al-Khwārizmi, pur non andando oltre le equazioni di secondo grado, cioè non oltre il campo della matematica di Diofanto, presenta infatti, accanto alla riacquisizione di nozioni classiche, un notevole grado di elaborazione originale (Franci e Toti Rigatelli, 1979). Solo gli algebristi della scuola italiana (bolognese, in particolare) del Cinquecento, fornendo la soluzione delle equazioni di III e IV grado, superarono il punto a cui era arrivata l'algebra di al-Khwārizmi.
La parola "algebra" deriva dall'arabo *al-jabr* e risale a circa l'820 d.C., proprio grazie ad al-Khwārizmi. Il termine *al-jabr* significa "restaurazione" o "completamento" e si riferisce al fatto che una quantità determinata può aggiungersi o togliersi ad ambo i membri di una data equazione, da cui deriva il cosiddetto "principio del trasporto" (Maracchia, 2005). Con *al-mukābala* si vuole invece indicare la "semplificazione", vale a dire la riduzione dei termini simili. Altri autori ritengono che *al-jabr* derivi da un termine

Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 5 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

babilonese usato per le equazioni, mentre *al-mukābala* starebbe per "mettere due cose faccia a faccia", "confrontare", "paragonare", cioè "mettere in equazione" (Franci e Toti-Rigatelli, 1979).

Nell'opera di al-Khwārizmi sono riportate le regole generali per la risoluzione delle equazioni di primo e di secondo grado; la quantità incognita è chiamata *cosa* (nella traduzione latina) o *radice di una pianta*, e da qui è venuto l'uso della parola "radice" per indicare la soluzione di un'equazione. Il termine "equazione" è di origine latina e si trova, per la prima volta, nel *Liber Abbaci* (1202) di Fibonacci.

Per quanto riguarda lo sviluppo del simbolismo algebrico si possono individuare tre stadi:

(a) algebra *retorica* nella quale i problemi e la loro risoluzione sono espressi completamente a parole;

(b) algebra *sincopata* nella quale per qualche operazione e per alcune quantità sono usate abbreviazioni simboliche;

(c) algebra *simbolica* nella quale viene usato un completo sistema di notazioni e tutte le trasformazioni algebriche sono espresse in simboli.

Leonardo Pisano, detto Fibonacci (ca. 1170 – ca. 1242): l'algebra arriva in Italia

A partire dall'XI secolo, si ha in Italia una consistente crescita demografica, soprattutto a Venezia, Genova e Pisa, in seguito a uno sviluppo economico senza precedenti, basato sul commercio per mare con i paesi del Mediterraneo, e con l'Europa continentale.

Il mercante pisano Guglielmo Bonacci decise di portare (circa nel 1185) il figlio quindicenne Leonardo a Bugia, emporio commerciale di Pisa situato nel nordest dell'attuale Algeria, per studiare i nuovi metodi aritmetici degli arabi, e forse anche allo scopo di fargli imparare la lingua araba. Leonardo Pisano non soggiornò solamente a Bugia, ma viaggiò in tutto il Mediterraneo: Egitto, Siria, Grecia, Costantinopoli, Sicilia e Provenza, ovunque i pisani avessero commerci ed affari. Lo scrive lui stesso nel Capitolo I, par. 3, del

Liber Abbaci, la sua grande opera sull'aritmetica e l'algebra, scritta in latino nel 1202, dopo il suo ritorno a Pisa:

Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bugia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano, mi fece andare da lui, durante la mia fanciullezza, valutando l'utilità e il vantaggio futuro, e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco. Qui, introdotto nell'arte da uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure degli Indiani, mi piacque sopra ogni altra cosa la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute, qualunque cosa si studiasse di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi, luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari. Ma io considerai addirittura tutto questo sapere e anche l'algoritmo e gli archi di Pitagora quasi un errore rispetto al metodo degli indiani. Quindi abbracciando in modo più stretto il metodo stesso degli Indiani e studiandolo più attentamente, aggiungendo in esso alcuni concetti in senso più specifico e inserendo anche alcune delle sottigliezze della geometria di Euclide, mi sono sforzato di comporre la totalità di questo libro, distinta in quindici capitoli, nel modo più comprensibile possibile dimostrando quasi tutto ciò che ho inserito con prove certe, affinché possano essere istruiti in questa scienza, con un metodo perfetto al di sopra di tutti gli altri, coloro che lo desiderano, e la gente latina d'altra parte, come accaduto finora, non vi si trovi del tutto esclusa. (da https://www.progettofibonacci.it).

Il titolo dell'opera non va tradotto in italiano come "Libro dell'abaco" ma "Libro del calcolo" (aritmetico e algebrico), questo perché l'opera di Leonardo Pisano tendeva proprio a mostrare come si possono scrivere i numeri ed eseguire le operazioni aritmetiche senza il bisogno di ricorrere a uno strumento fisico come l'abaco.
Il *Liber Abbaci* comprende una ricchissima miscellanea di problemi: da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie, a quelli puramente matematici. Ha un livello molto alto; è completo di dimostrazioni, sia aritmetiche sia geometriche per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione assiomatico-deduttiva che gli arabi avevano

imparato dai greci. Nel suo complesso, si può considerare un prolungamento latino della matematica araba.

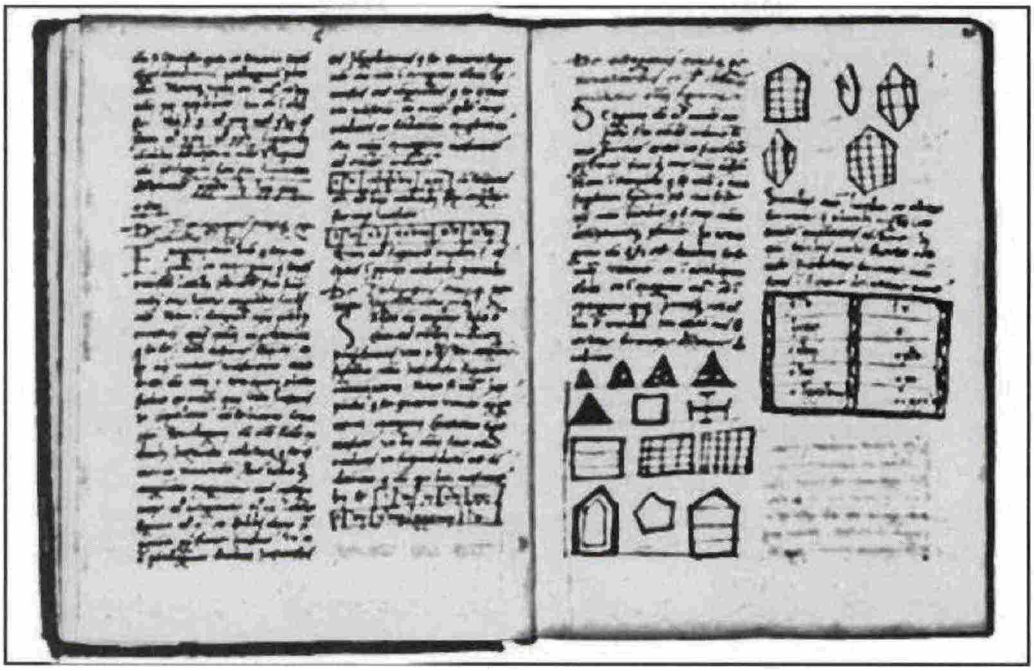

Figura 1. Pagine del *Liber Abbaci* (1202), di Leonardo Pisano

Il *Liber Abbaci* è monumentale. Suddiviso in 15 capitoli, è stato tradotto in italiano solo di recente (dal 2019 al 2022, progetto coordinato da Laura Catastini e Franco Ghione) e pubblicato nel sito www.progettofibonacci.it. Da ricordare che nel 2020 è stata pubblicata la prima edizione filologica - dopo otto secoli! - a cura di Enrico Giusti e Paolo D'Alessandro (Giusti e D'Alessandro, 2020).
I primi sette capitoli trattano di Aritmetica:
Capitolo I - Sulla conoscenza delle nove figure indiane, e come con esse si scriva ogni numero, e quali numeri, e come si debbano tenere sulle mani e introduzione dell'abaco
Capitolo II - Sulla moltiplicazione dei numeri interi
Capitolo III - Sulla addizione dei numeri interi
Capitolo IV - Sulla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori
Capitolo V - Sulla divisione di numeri interi per numeri interi

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Capitolo VI - Sulla moltiplicazione di numeri interi per frazioni e di frazioni senza interi
Capitolo VII - Sulla addizione, sottrazione e divisione di numeri interi con frazioni e riduzione delle parti dei numeri in singole parti.

I primi cinque capitoli sono interamente dedicati all'esposizione della nuova aritmetica: viene presentata la scrittura posizionale dei numeri naturali, anche molto grandi, con l'uso delle parole e delle cifre indo-arabiche. Si prosegue con il calcolo con i numeri "rotti", ossia con le frazioni, nei cap. VI e cap. VII.
I quattro capitoli successivi sono di tipo "applicativo":
Capitolo VIII - Sull'acquisto e vendita di merci e simili
Capitolo IX - Sui baratti delle merci, acquisto di bolzonaglie e alcune regole simili
Capitolo X - Sulle società fatte fra consoci
Capitolo XI - Sulla fusione di monete e delle loro regole, pertinenti alla fusione.
Negli ultimi quattro capitoli si risolvono moltissimi problemi e nell'ultimo viene citato esplicitamente anche l'uso dell'algebra:
Capitolo XII - Sulla soluzione di questioni di varia natura dette erratiche
Capitolo XIII - Sulla regola della doppia falsa posizione, come per essa si possano risolvere quasi tutte le varie questioni erratiche
Capitolo XIV - Sulla determinazione delle radici quadrate e cubiche e la moltiplicazione e divisione e somma e estrazione di queste radici tra di loro e dei recisi e delle loro radici
Capitolo XV - Sulle regole e proporzioni pertinenti alla geometria: questioni di algebra e almuchabala.

Nei Capitoli XII e XIII Fibonacci usa in particolare il metodo di falsa posizione e quello di doppia falsa posizione (detto in arabo *elchataym*).

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Alcuni problemi dal *Liber Abbaci*

Riportiamo nel seguito alcuni problemi che introducono ad una parte molto significativa dell'opera e offrono possibili spunti per la didattica dell'aritmetica e dell'algebra.

Liber Abbaci – cap.XII.3.1 – Problema dell'albero.

C'è un albero, del quale sta nascosto sotto terra, $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ *corrispondente a 21 palmi: si chiede quale sia la lunghezza di quell'albero. Poiché,* $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ *si trovano nel 12, immagina l'albero diviso in 12 parti uguali, di cui un terzo, e un quarto, cioè 7 parti, corrispondono a 21 palmi: Perciò come 7 sta a 21, così, proporzionalmente, 12 parti stanno alla lunghezza dell'albero. E poiché quando quattro numeri sono proporzionali, la moltiplicazione del primo per il quarto è uguale alla moltiplicazione del secondo per il terzo: allora moltiplicando il secondo termine, 21, per il terzo termine, 12, che sono noti, e dividendo similmente per il primo numero, cioè per 7, si otterrà 36 per il quarto numero incognito, cioè per la lunghezza di quell'albero: oppure poiché 21 è il triplo di 7, prendi il triplo di 12, e avrai similmente 36.*

Fibonacci prima di tutto trova il minimo comune multiplo tra 4 e 3, che è 12, Quindi immagina di dividere la lunghezza totale dell'albero in 12 parti uguali, di cui 7 parti sono nascoste sottoterra. Queste 7 parti corrispondono a 21 palmi. Quindi utilizza una proporzione (che possiamo scrivere come $7:12 = 21:x$) e applica la proprietà fondamentale delle proporzioni (il prodotto del primo e del quarto termine è uguale al prodotto del secondo e del terzo). Conclude che la lunghezza totale dell'albero è 36 palmi. La soluzione di Fibonacci può anche essere ricavata risolvendo l'equazione: $\frac{7}{12}x = 21$.

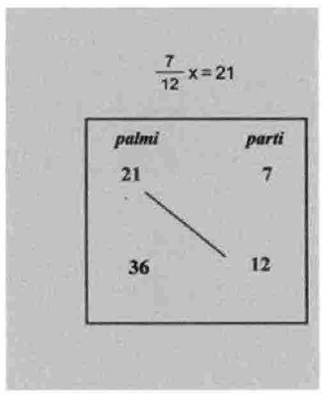

Figura 2

Su questo problema, come per altri, Fibonacci fa in seguito delle variazioni, con spiegazioni sempre molto dettagliate e chiare. Per

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

esempio, nel problema 3.2 del cap. XII, riprende il problema dell'albero in cui utilizza il metodo di falsa posizione:

C'è poi un altro modo che possiamo usare: poni come incognita un qualsiasi numero noto, che sia divisibile esattamente per le frazioni indicate nel problema: e in base ai dati del problema stesso, ingegnati a ricavare col numero posto, la proporzione che va a finire nella soluzione di quel problema. Per esempio: il numero cercato in questo problema è la lunghezza dell'albero: perciò poni che sia 12, poiché è divisibile esattamente per 3, e per 4, che sono sotto le linee di frazione: sapendo che, $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ *dell'albero corrisponde a 21, prendi,* $\frac{1}{4}\,\frac{1}{3}$ *del 12 posto, risulta 7; se per caso fosse risultato 21, avremmo avuto quanto richiesto, cioè quell'albero risulterebbe di 12 palmi. Ma poiché 7 non è 21, va fatta la proporzione...*

Presentiamo ora il problema 1.4 del cap. XII in cui Fibonacci insegna a calcolare la somma dei primi numeri dispari (cominciando da 1 fino a un qualunque altro numero dispari, per es. da 1 a 19).

E allora se vuoi raccogliere solo numeri dispari, cominciando da 1 fino a un qualunque altro numero, puoi procedere in base alla regola precedente. O, il che è lo stesso, moltiplica la metà della somma degli estremi per se stessa, e avrai il risultato cercato. Per esempio: se vuoi raccogliere i numeri dispari, da 1 a 19, moltiplica la metà della somma degli estremi, cioè 10, per se stessa, cioè per il numero che esprime la loro quantità. Infatti i numeri dispari da 1 fino a 19 sono 10; farà 100 per la detta raccolta.

Dunque, Fibonacci spiega come ottenere la somma $1+3+5+\cdots+17+19$ (dei primi dieci numeri dispari). Dice di moltiplicare "la metà della somma degli estremi", cioè 10, per "il numero che esprime la loro quantità", cioè ancora 10. Si ottiene quindi 100. Si tratta della formula che oggi scriviamo nel seguente modo:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \text{ con } n \text{ intero positivo.}$$

Presentiamo di seguito il più celebre problema contenuto nel *Liber Abbaci*: il problema XII.7.30 delle coppie di conigli:

Quante paia di conigli sono generati in un anno da una coppia sola?

Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 11 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Un tale mise una coppia di conigli in un posto, che era circondato dappertutto da un muro, per sapere quante paia sarebbero nate in un anno, essendo nella loro natura di partorire ogni mese un'altra coppia, e partoriscono nel secondo mese dalla loro nascita.
Poiché la coppia sopra citata partorisce nel primo mese, la raddoppierai, saranno due coppie in un mese. Una di queste, cioè la prima, genera nel secondo mese, e così nel secondo mese ci sono 3 coppie; due delle quali in un mese sono ingravidate;
e nel terzo mese sono generate 2 coppie di conigli, e così ci sono 5 coppie nello stesso mese; delle quali in quel mese si ingravidano 3 coppie;
e nel quarto mese sono 8 coppie; 5 coppie di queste generano altre 5 coppie: che sommate con 8 coppie fanno 13 coppie nel quinto mese; ....".

coppia	**1**
primo	**2**
secondo	**3**
terzo	**5**
quarto	**8**
quinto	**13**
sesto	**21**
settimo	**34**
ottavo	**55**
nono	**89**
decimo	**144**
undicesimo	**233**
dodicesimo	**377**

Figura 3

Nel ragionamento di Fibonacci si ha quindi, all'inizio dell'anno, una sola coppia (feconda, cioè, in grado di concepire); alla fine del primo mese: 2 coppie (una feconda, l'altra neonata); alla fine del secondo mese: 3 coppie (due feconde, una neonata); alla fine del terzo mese: 5 coppie (tre feconde, due neonate); alla fine del quarto mese: 8 coppie (cinque feconde, tre neonate), e così via. Alla fine dell'anno si hanno quindi 377 coppie, come è illustrato nella figura 3 a fianco (dal sito di *Progetto Fibonacci*) che riproduce quella presente nel *Liber Abbaci*.
In rete si trovano delle immagini, come quella riportata di seguito (figura 4), che non corrispondono però all'originale del problema; infatti, nel *Liber Abbaci* alla fine del primo mese, Fibonacci scrive che ci sono due coppie (e non una sola). Nella situazione di figura 4, si dovrebbe supporre che la coppia messa inizialmente nel posto circondato da un muro sia neonata.

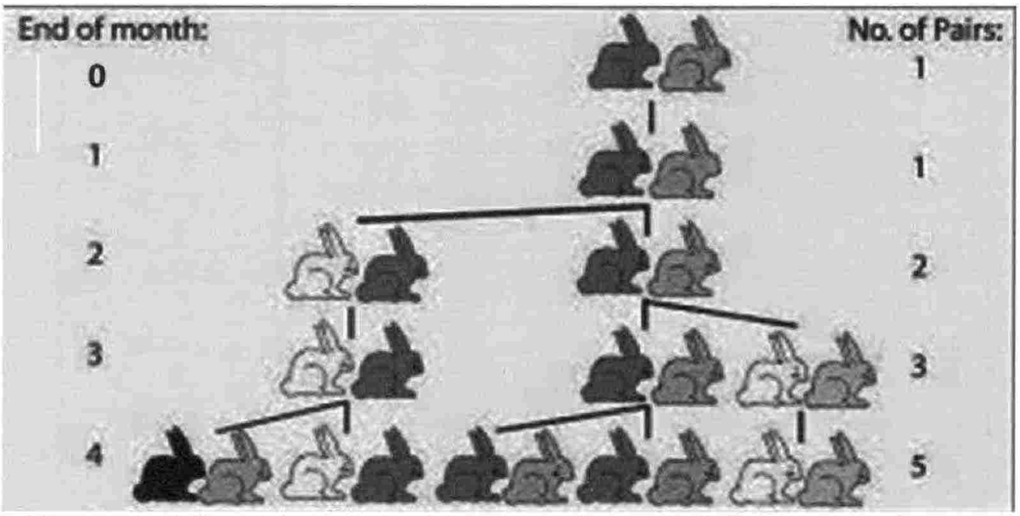

Figura 4. "Fine del mese […] Numero di coppie". Immagine che non corrisponde all'originale di Fibonacci.

Il Capitolo XIV del *Liber Abbaci* ha questo incipit:
Mi sia permesso inserire in questo capitolo sulle radici alcuni numeri fondamentali che sono chiamati chiavi; e, poiché sono provate con chiare dimostrazioni nel secondo libro [degli Elementi] *di Euclide, è sufficiente procedere soltanto attraverso le loro definizioni secondo la matematica.*
All'interno del Capitolo, fra l'altro, Fibonacci propone:
Ancora, se si scompone un numero in due parti qualsiasi, il prodotto di ciascuna parte per se stessa con il doppio della moltiplicazione di una parte per l'altra, sarà uguale al quadrato dell'intero numero: così se si scompone 12 in 5 e in 7, il prodotto di 5 per se stesso sarà 25, e di 7 per se stesso sarà 49, e il doppio di 5 per 7 fa 70; e, sommati questi fra loro, si ha 144 cioè il prodotto dell'intero numero per se stesso.
Con il simbolismo attuale:

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

Si tratta del quadrato di un binomio.
Nell'esempio, Fibonacci scompone 12 in 5 + 7 e quindi ottiene:

$$5^2 + 7^2 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 25 + 49 + 70 = 144 = 12^2.$$

Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 13 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

La rivoluzione prodotta dal *Liber Abbaci* e la diffusione della nuova matematica

Possiamo certamente dire che il *Liber Abbaci* provoca una vera e propria rivoluzione. La nuova matematica che Leonardo Pisano porta con sé dai suoi viaggi nel Mediterraneo è quasi del tutto estranea alle conoscenze matematiche del tempo. Laura Catastini e Franco Ghione, coordinatori del *Progetto Fibonacci*, affermano che si tratta di una matematica che ha trasformato il mondo, non di una trasformazione immediata ma di un processo durato almeno un secolo, attraverso l'introduzione progressiva del nuovo modo di scrivere i numeri e di fare le operazioni con essi. Si tratta di un modo molto più semplice rispetto al faticosissimo metodo basato sui numeri romani e sull'abaco. Questa scrittura dei numeri e questo modo di fare i calcoli si diffondono soprattutto tra i mercanti. Nascono in molte città italiane, tra il Medioevo e il Rinascimento, le "scuole d'abaco", le più famose in Toscana ma anche in molte città come Venezia, Verona, Brescia, ecc. Alcuni dei matematici più famosi del Rinascimento sono in origine dei maestri d'abaco. Basti pensare a Luca Pacioli (ca. 1447-1517) o a Niccolò Tartaglia (1500-1557).

Il *Liber Abbaci* è uno dei trattati più completi della matematica medievale. L'opera ha però incontrato delle difficoltà ad affermarsi; queste erano legate al fatto che era necessario provare la superiorità delle nuove tecniche rispetto a quelle consacrate dalla tradizione. L'introduzione della notazione posizionale e delle cifre arabo-indiane al posto dei numeri romani richiese che venissero superate le diffidenze e le resistenze da parte di chi temeva di essere… ingannato da coloro che possedevano le nuove tecniche di calcolo.

Il fatto che ad approfittare del nuovo sistema di numerazione e dei nuovi algoritmi siano stati soprattutto i mercanti è legato all'aumento dei traffici che in quel periodo stavano uscendo dalla dimensione locale per acquistare un'ampiezza che richiedeva tecniche di calcolo e di registrazione più efficienti e sicure. Di qui la necessità di apprendere le principali nozioni di calcolo aritmetico, e di conseguenza la nascita di scuole apposite, in cui esse venivano

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

insegnate. Fin dal loro primo apparire, le scuole d'abaco si configurarono generalmente, accanto alle scuole di grammatica, come un livello di studi "medio", che faceva seguito ad un primo ciclo scolastico "elementare" in cui i ragazzi imparavano a leggere e scrivere in latino e volgare.

Mentre la scuola di grammatica era dedicata all'approfondimento della grammatica latina e allo studio delle lettere, della retorica e della logica, la scuola d'abaco era riservata all'apprendimento della matematica e aveva in prevalenza lo scopo di preparare all'esercizio di attività mercantili, commerciali e artistiche; veniva comunque frequentata anche da ragazzi di famiglia nobile e da chi desiderava proseguire gli studi per intraprendere poi una professione (Ulivi, 2017).

Nelle scuole d'abaco si usavano dei libri, detti "trattati d'abaco", molti dei quali ci sono pervenuti. Ricordiamo, per esempio il trattato d'abaco di Jacopo da Firenze (inizi del XIV sec.). Aveva come titolo *Tractatus algorismi* (1307) e si può trovare in traduzione inglese qui: http://akira.ruc.dk/~jensh/Publications/1999%7bc%7d_Jacopo-Tractatus_transcription.pdf, mentre una copia del Quindicesimo secolo è consultabile in
https://digi.vatlib.it/view/MSS_Vat.lat.4826.

Nei trattati d'abaco sono riportati molti dei problemi di Fibonacci, (riproposti a volte in modo più pratico e semplice). Per esempio, nel trattato di Jacopo da Firenze troviamo il "problema della serpe e della torre" (che proponiamo nell'articolo successivo - la seconda parte del presente intervento): esso è una variante di un analogo problema che si trova nel *Liber Abbaci* e ha per protagonista un leone che deve uscire da un pozzo:

Problema XII.3.14. *Un leone è in un pozzo la cui profondità è di 50 palmi, ma sale ogni giorno* $\frac{1}{7}$ *di un palmo, e scende di* $\frac{1}{9}$. *Si chiede in quanti giorni il leone uscirà dal pozzo.*

Tuttavia, Høyrup (1998) fa notare che non c'è un solo problema nella sezione dedicata all'algebra nel *Tractatus* che sia in comune con il *Liber Abbaci* di Fibonacci. Mette in risalto che, invece, c'è un

Mensile
03-2024
Pagina 133/49
Foglio 15 / 17
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE
www.ecostampa.it

accordo, a volte parziale, a volte totale, con l'opera del matematico persiano al-Karaji (ca. 953 - ca. 1029). Questo ci suggerisce la complessità della storia della matematica medievale e ci mette in guardia dall'accettare acriticamente lo schema cronologico sequenziale "matematica araba-Fibonacci-trattati d'abaco".
La prima opera matematica stampata (a Treviso), pochi anni dopo l'invenzione della stampa a caratteri mobili, è stata *larte de labbacho* (detta "Aritmetica di Treviso", 1478), di autore anonimo, probabilmente un ecclesiastico. L'interesse per l'opera, dal punto di vista storico e didattico, negli ultimi decenni è riscontrabile in numerose pubblicazioni: si vedano, ad esempio, i lavori del 1989 e del 1994 di Giorgio Tomaso Bagni (1958-2009). Swetz (1989) riporta l'originale tradotto in lingua inglese da David Eugene Smith (1860-1944), accompagnato dalle considerazioni di Frank Joseph Swetz (1937-2023) sulla nuova matematica del Quindicesimo secolo.
Il dettagliato lavoro di Elisabetta Ulivi riguardante *La matematica dell'abaco in Italia: scuole, maestri, trattati fra XIII e XVI secolo* è disponibile in
https://php.math.unifi.it/convegnostoria/materiali/ulivi.pdf. Sia il *Liber Abbaci* che molti dei circa 300 manoscritti che riportano trattati d'abaco arrivati fino ad oggi possono essere una risorsa per l'insegnamento della matematica.

Conclusioni

In questo articolo abbiamo toccato alcuni punti della storia dell'algebra classica, con riferimento soprattutto all'opera di al-Khwārizmi, al *Liber Abbaci* di Fibonacci e ai trattati d'abaco. Nei secoli, dal Medioevo al Rinascimento, si è sviluppata un'autentica rivoluzione nel modo di scrivere i numeri e di fare le operazioni, basandosi sull'uso delle cifre "indo-arabiche", fra cui lo zero, e sul sistema di numerazione posizionale in base dieci. Le scuole d'abaco hanno contribuito alla diffusione dell'aritmetica e delle tecniche di calcolo, mentre l'algebra manteneva la forma retorica o la forma sincopata.

Nell'articolo successivo che costituisce la seconda parte del presente intervento, mostriamo, attraverso alcuni esempi, in che modo il *Liber Abbaci* e i trattati d'abaco possono essere effettivamente utilizzati come fonti di problemi per l'introduzione precoce al pensiero algebrico, intesa come sottolineatura specifica all'interno del percorso complessivo di educazione matematica. Il ricorso alle fonti storiche richiede un'attenta riflessione sui metodi e sulla scelta delle attività da proporre in classe. Considerate le finalità che caratterizzano il primo ciclo di istruzione, gli insegnanti possono recuperare nei documenti originali idee per percorsi didattici pluridisciplinari.

Bibliografia

Bagni, G.T. (1989). L'Aritmetica di Treviso. In B. D'Amore-F. Speranza (a cura di). *Lo sviluppo storico della matematica*, v. 1, Armando, Roma, 27-34.

Bagni, G.T. (1994), Numeri e operazioni nel Medioevo: *larte de labbacho* (l'Aritmetica di Treviso, 1478), *La matematica e la sua didattica*, n. 4, 432-444.

Boyer, C.B. (1976), *Storia della matematica*. ISEDI, Milano.

Catastini, L., Ghione, F. e Rashed, R. (2016), *Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*. Carocci, Roma.

Catastini, L., Ghione, F. (2023), *La matematica che trasformò il mondo, Il* Liber Abbaci *di Leonardo Pisano detto Fibonacci*. Carocci, Roma.

Devlin, K. (2012), *The Men of Numbers*, trad. it. con un titolo (*I numeri magici di Fibonacci*). Rizzoli, Milano.

Franci, F. e Toti Rigatelli L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*. Mursia, Milano.

Giusti, E. e D'Alessandro, P. (2020), *Leonardi Bigolli Pisani, vulgo Fibonacci, Liber Abbaci*. Olschki, Firenze.

L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

Maracchia, S. (2005), *Storia dell'algebra.* Liguori, Napoli.

Neugebauer, O. (1969). *The exact sciences in antiquity*, 2nd ed., Dover (*Le scienze esatte nell'antichità* (1974), trad. it. Feltrinelli, Milano).

Swetz, F.J. (1989). *Capitalism and Arithmetic*. Open Court, La Salle, Illinois.

Ulivi, E. (2017). Scuole e maestri d'abaco in Italia tra Medioevo e Rinascimento. In E. Giusti e R. Petti (a cura di). *Un ponte sul Mediterraneo. Leonardo Pisano, la scienza araba e la rinascita.* Polistampa, Firenze.